ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
84^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
20 Ιανουαρίου 2024

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων

$$\mathrm{A} = (5^2 - 4^2)\cdot(2^3 - 2^2 + 1) + (10^2 - 8^2)\cdot 2024^0,$$
$$\mathrm{B} = (1 + 3 + 3^2 + 3^3 - 31)\cdot(1 + 5 + 5^2 + 5^3 - 3\cdot 5^2)$$

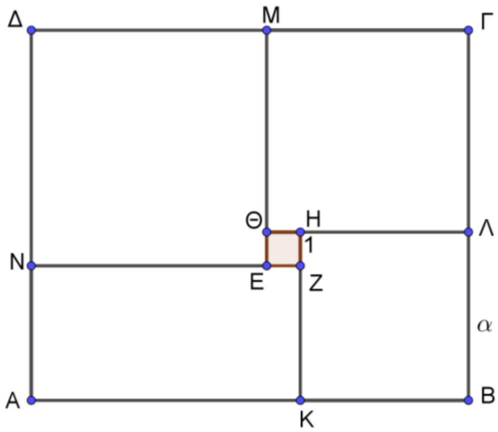
και να εκφράσετε το πηλίκο $\frac{\mathrm{A}^{1012}}{\mathrm{B}^{1012}}$ ως δύναμη με βάση το 3.

Πρόβλημα 2. Η Μαρία πριν να ανοίξουν τα Σχολεία πήγε για ψώνια στην αγορά. Εκεί από τα χρήματα που είχε μαζί της ξόδεψε το $\frac{1}{8}$ των χρημάτων της για να αγοράσει τετράδια και το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων της για να αγοράσει βιβλία. Στη συνέχεια αγόρασε ένα φόρεμα με έκπτωση 20% ξοδεύοντας τα $\frac{2}{3}$ των χρημάτων που της είχαν απομείνει. Μετά από αυτές τις αγορές η Μαρία διαπίστωσε ότι της είχαν απομείνει 50 ευρώ. Να βρείτε: **(α)** Πόσα χρήματα είχε μαζί της η Μαρία πηγαίνοντας στην αγορά.
(β) Ποια ήταν η αρχική τιμή του φορέματος που αγόρασε πριν την έκπτωση.

Πρόβλημα 3. Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει υποδιαιρεθεί στα τετράγωνα ΚΒΛΗ, ΕΖΗΘ, ΘΛΓΜ, ΝΕΜΔ και στο ορθογώνιο ΑΚΖΝ.
Δίνεται ότι το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει πλευρά ίση με 1, το τετράγωνο ΚΒΛΗ έχει πλευρά ίση με α και για το ορθογώνιο ΑΚΖΝ ισχύει η σχέση

$$\mathrm{AK} = 2\cdot \mathrm{KZ}.$$

Να βρείτε την τιμή του α και το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.



Πρόβλημα 4. (α) Να γράψετε τον ακέραιο 2024 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.
(β) Να γράψετε την κλασματική μονάδα $\frac{1}{2024}$ ως διαφορά δύο κλασματικών μονάδων με παρονομαστές μικρότερους του 2024, δηλαδή να βρείτε θετικούς ακέραιους μ, ν μικρότερους του 2024 έτσι ώστε:

$$\frac{1}{2024} = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu}.$$

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
84ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
20 Ιανουαρίου 2024

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Θεωρούμε τους θετικούς ακέραιους της μορφής

$$\overline{\alpha\alpha\beta\beta} = 1000\alpha + 100\alpha + 10\beta + \beta, \text{ με } \alpha \neq 0, \beta \text{ ψηφία.}$$

(α) Να αποδείξετε ότι κάθε ακέραιος που γράφεται στην παραπάνω μορφή είναι πολλαπλάσιο του 11.

(β) Να προσδιορίσετε όλους τους ακέραιους της παραπάνω μορφής που είναι πολλαπλάσια του 4 και του 9 και να γράψετε καθέναν από αυτούς ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Πρόβλημα 2. Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του ακέραιου ν για τις οποίες ο αριθμός

$$\mathrm{A} = \frac{9\nu^2 + 15\nu + 10}{3\nu + 2}$$

είναι ακέραιος.

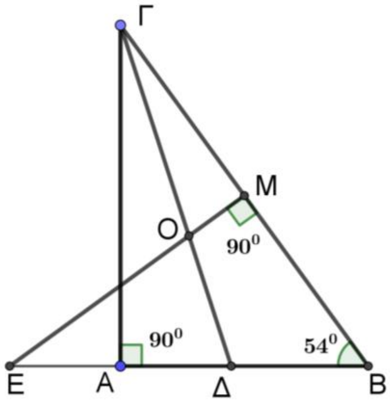
Πρόβλημα 3. Στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου της χώρας μας συμμετέχουν 14 ομάδες που η καθεμία παίζει με όλες τις άλλες δύο παιγνίδια. Μετά το τέλος όλων των παιγνιδιών οι 6 πρώτες ομάδες δημιουργούν έναν όμιλο στον οποίο οι ομάδες παίζουν μεταξύ τους ανά δύο από 2 παιγνίδια. Οι 8 υπόλοιπες ομάδες δημιουργούν δεύτερο όμιλο στον οποίο κάθε ομάδα παίζει με όλες τις άλλες μία μόνο φορά. Κάθε ομάδα παίρνει 3 βαθμούς για κάθε νίκη της, 1 βαθμό για κάθε ισοπαλία της και 0 βαθμούς για κάθε ήττα της.

(α) Να βρείτε πόσα παιγνίδια παίζονται συνολικά μέσα σε μία χρονιά.

(β) Αν σε μία χρονιά το σύνολο των βαθμών όλων των ομάδων ήταν 677, να βρείτε πόσα παιγνίδια έληξαν με ισοπαλία.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{\mathrm{A}} = 90^0$ και $\widehat{\mathrm{B}} = 54^0$. Η κάθετη στο μέσο Μ της πλευράς ΒΓ τέμνει τη διχοτόμο ΓΔ της γωνίας $\widehat{\Gamma}$ στο σημείο Ο και την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ε. Έστω $\mathrm{A\Gamma} = \beta$, $\mathrm{AB} = \gamma$, $\mathrm{B\Gamma} = \alpha$.



(α) Να αποδείξετε ότι: **(i)** $\mathrm{OB} = \mathrm{O\Gamma} = \mathrm{OE}$,
(ii) $\Gamma\Delta = \Gamma\mathrm{E}$.

(β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΕ συναρτήσει των μηκών α, β, γ των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.

Σημείωση. *Να κάνετε στο φύλλο απαντήσεων το δικό σας σχήμα.*

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
84ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"

20 Ιανουαρίου 2024

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Να αποδείξετε ότι το πηλίκο

$$\mathrm{A}=\frac{\nu^{10}-\nu^{6}-\nu^{4}+1}{\nu^{7}-\nu^{6}-\nu+1}$$

είναι σύνθετος ακέραιος, για κάθε ακέραιο $\nu \geq 2$.

Πρόβλημα 2. Δίνεται ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓμε $\widehat{\mathrm{B}}=90°$. Έστω Μ το μέσο της υποτείνουσας ΑΓ και έστω Ν το μέσο της πλευράς ΑΒ. Έστω Κ το συμμετρικό του Ν ως προς το Β και έστω Λ το σημείο τομής της ευθείας ΚΜ με την πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΝΛ είναι κάθετη στην ευθεία ΚΓ.

Πρόβλημα 3. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τρεις πραγματικοί αριθμοί α,β,γ διαφορετικοί μεταξύ τους τέτοιοι ώστε ο καθένας από αυτούς να ισούται με το τετράγωνο του αθροίσματος των δύο άλλων.

Πρόβλημα 4. Αν οι πραγματικοί αριθμοί α,β,γ είναι τέτοιοι ώστε

$$\alpha+\beta+\gamma=6 \text{ και } \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=9,$$

να προσδιορίσετε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\alpha\beta\gamma+\sqrt{(\alpha^2+9)(\beta^2+9)(\gamma^2+9)}\,.$$

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
84^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”

20 Ιανουαρίου 2024

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Να προσδιορίσετε τους μη αρνητικούς ακέραιους ν που είναι λύσεις του συστήματος των ανισώσεων:

$$-45 \leq \frac{2025}{45-\nu} \text{ και } \frac{2025}{45-\nu} \leq 45-\nu.$$

Πρόβλημα 2. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημείο Ε στο εξωτερικό του, στο ίδιο ημιεπίπεδο της ΑΓ με το Β, τέτοιο ώστε $\mathrm{A\hat{E}\Gamma} = 90^0$ και $\mathrm{AE} = 2 \cdot \mathrm{E\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΕΔ διέρχεται από το μέσο της πλευράς ΒΓ του τετραγώνου.

Πρόβλημα 3. Τα 22 παιδιά μιας τάξης σχηματίζουν κύκλο έτσι ώστε κανένα παιδί να μην έχει και στις δύο γειτονικές του θέσεις δεξιά και αριστερά του αγόρι. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό αριθμό των κοριτσιών της τάξης.

Πρόβλημα 4. Από όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (m, n) που ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2024}$$

να βρείτε το ζεύγος με το μικρότερο δυνατό m.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
84ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"

20 Ιανουαρίου 2024

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και το ορθόκεντρο του Η. Έστω Μ και Ν τα μέσα των τμημάτων ΒΗ και ΓΗ, αντίστοιχα. Έστω Κ και Λ τα σημεία τομής της ευθείας ΜΝ με τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα. Έστω Δ το σημείο τομής της ευθείας ΚΗ με την ΑΜ και έστω Ε το σημείο τομής της ευθείας ΛΗ με την ΑΝ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι παράλληλη στην ευθεία ΒΓ.

Πρόβλημα 2. Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες (x, y, z) πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν και τις τρεις επόμενες εξισώσεις:

$$4x + 3y^3 = z^5$$

$$4y + 3z^3 = x^5$$

$$4z + 3x^3 = y^5.$$

Πρόβλημα 3. Τα 26 παιδιά μιας τάξης σχηματίζουν κύκλο έτσι ώστε κανένα παιδί να μην έχει και στις δύο γειτονικές του θέσεις δεξιά και αριστερά του αγόρι. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό αριθμό των κοριτσιών της τάξης.

Πρόβλημα 4. Τα πολυώνυμα

$$P(x) = (4x^2 + 22x + 19)^{1012},$$

$$Q(x) = a_{2024}x^{2024} + a_{2023}x^{2023} + \cdots + a_1x + a_0,$$

όπου $a_0, a_1, \ldots, a_{2024}$ ακέραιοι, είναι ίσα.

Να αποδείξετε ότι η αριθμητική τιμή του κλάσματος

$$\frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2021} + a_{2023}}{2 + 4 + \cdots + 2022 + 2024}$$

είναι άρτιος ακέραιος.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***

Καλή επιτυχία!